

Capítulo 3

Implementación computacional de métodos de integración numérica: Punto medio, del trapecio, Simpson 1/3 y 3/8

Claudio Lazcano Morales¹, José Julio Conde Mones¹,
Carlos Arturo Hernández Gracidas², Félix Augusto
Aquino Camacho³, José Jacobo Oliveros Oliveros¹.

¹FCFM-BUAP, ²CONACYT-FCFM-BUAP

³Escuela Preparatoria “Alfonso Calderón Moreno”,
BUAP

Resumen

En este trabajo, se presentan elementos básicos de la teoría de integración y se proporcionan ejemplos en los que se aplican los métodos del Punto Medio, del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8, de los cuales se incluyen sus códigos en MATLAB. Los resultados numéricos muestran la eficiencia y factibilidad de cada uno de los métodos de integración estudiados.

Introducción

Existen métodos analíticos y numéricos para integrar una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Los Métodos de Integración Numérica (MIN) o *cuadraturas* son aplicados cuando es imposible el cálculo exacto de su integral aplicando los métodos analíticos de integración o cuando se tienen datos tabulados en algunos puntos del dominio de una función. Así, un MIN es un procedimiento que permite hallar un valor numérico aproximado a la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ ([5]). Cabe mencionar que los MIN se aplican tanto para funciones definidas en intervalos cerrados $([a, b])$ y abiertos (a, b) ([2], [13], [20]), como para funciones definidas en regiones bidimensionales o tridimensionales con una

geometría regular o irregular ([6], [7], [22]) que tiene aplicación en la solución de problemas directos e inversos ([12]). Muchos de estos problemas de aplicación de la ciencia e ingeniería están descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales con condiciones de frontera y/o iniciales ([3], [9], [19]). Entre los métodos numéricos más usados para resolver ecuaciones diferenciales está el Método de Elemento Finito (MEF), el cual hace uso de los MIN ([4]).

Por otro lado, en los problemas de aplicación, muy frecuentemente se cuenta con un número finito de datos, registrados por algún instrumento de medición sobre la frontera o exterior de la región de estudio. La imposibilidad de medir en más puntos puede deberse al alto costo o a que la tecnología existente hasta el momento no permite tomar mediciones en más puntos de la frontera de un medio inaccesible. Por ejemplo, al realizar el registro de un electroencefalograma, los electrodos se posicionan sobre el cuero cabelludo de acuerdo al sistema internacional 10-20 ([1], [18]). Ahora, cuando se tiene un número finito de datos o mediciones tabuladas de una función desconocida, que representa algún fenómeno de estudio, se pueden aplicar métodos de interpolación para poder tener valores aproximados de la función en puntos donde no se conoce su valor, y de esta forma aplicar un MIN si se desea calcular su integral ([8], [24]).

Como se había mencionado antes, algunas funciones no tienen antiderivada o primitiva elemental, por lo que resulta imposible el cálculo exacto de su integral aplicando los métodos analíticos, por lo cual los MIN son una herramienta útil para aproximar la integral definida de este tipo de funciones. Los MIN también permiten calcular una aproximación numérica de una antiderivada de una función f a través del Primer Teorema Fundamental del Cálculo: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, donde la integral es en sentido de Riemann ([21]). Cabe mencionar que existen otros tipos de integrales como la Lebesgue y la Henstock-Kurzweil ([23]). Hay funciones que son Lebesgue integrables pero no Riemann integrables. Por ejemplo, la función de Dirichlet que vale 0 en los irracionales y 1 en los racionales, definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$, es Lebesgue integrable, pero no es Riemann integrable ([20]). Por otra parte, la función definida a través de $f(x) = \frac{1}{x} \text{sen}(\frac{1}{x})$ en $(0, 1]$ y 0 en $x = 0$, es Henstock-Kurzweil integrable, pero no es ni Lebesgue, ni Riemann integrable, este tema es motivo de investigación reciente. En [14] se utiliza el MEF

para encontrar la solución numérica de un problema elíptico con funciones integrables de Henstock-Kurzweil, en donde se aplican algunos métodos de cuadratura como la Trapezoidal adaptativa y la de Lobatto para integrar funciones que son altamente oscilantes en sentido de Henstock-Kurzweil en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Este artículo está enfocado a presentar los MIN del Punto Medio, del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8, además de la implementación de estas en MATLAB para funciones continuas $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sin embargo, las cuadraturas presentadas en este trabajo no siempre funcionan para otro tipo de funciones, como por ejemplo para la función Henstock-Kurzweil integrable mencionada arriba, la cual es altamente oscilante y no acotada; en este caso, puede aplicarse una cuadratura Trapezoidal con una malla adaptativa para el intervalo de integración ([14], [25]).

1 Integrales no elementales: Funciones sin primitiva elemental

Una función es llamada elemental si puede ser expresada mediante un número finito de sumas, restas, productos, cocientes o composiciones de funciones potencias, radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas. También se dice que una función $y = f(x)$ tiene una antiderivada o primitiva si existe una función $g(x)$ tal que su derivada $g'(x) = f(x)$. La integral indefinida g de la función f (la cual pertenece a una clase de funciones antiderivadas G), se denota por el símbolo $\int f(x)dx$. Nótese que los elementos de G son primitivas de la forma $g(x) + c$, donde c es una constante real. En este sentido, se dice que una función no tiene integral elemental si su primitiva, si existe, no es posible expresarla como combinación de funciones elementales.

Sabemos que, si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces es Riemann integrable. De esto, surge la siguiente pregunta: *¿Los métodos de integración que se aprenden en el curso de Cálculo Integral (a nivel medio superior o superior) bastan para integrar toda función continua?* La respuesta parece ser “sí”, pues en los cursos, después de varios cálculos algebraicos, siempre se llega a una integral indefinida $g(x) = \int f(x)dx$, la cual permite calcular la integral definida de la función f en un intervalo $[a, b]$ aplicando

el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo: $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$. Sin embargo, existen funciones que no tienen primitiva elemental, una de ellas es la función campana de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (1)$$

cuya integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

no se puede expresar en términos de funciones elementales ([11]). De hecho, la mayoría de las funciones elementales no tienen integrales elementales, y una forma de calcularlas numéricamente es a través del Primer Teorema Fundamental del Cálculo ([21]). Para mayor información sobre las integrales no elementales véase [11] y [17].

2 Integración aproximada

Para funciones como la campana de Gauss, dada en (1), que no tiene integral elemental, se hace uso de los MIN para obtener aproximaciones de sus integrales definidas. Las fórmulas de Newton-Cotes son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de interpolación que es fácil de integrar ([5]). La interpolación consiste en, dado un conjunto de datos, hallar una función de cierta clase que pase por ese conjunto de datos. Las clases más comunes son los polinomios y las funciones continuas. Como se mencionó en la Introducción, en las aplicaciones de la ciencia e ingeniería se busca estudiar distintos fenómenos, acerca de los cuales se tiene un primer conocimiento por medio de mediciones. Estas mediciones, a su vez, son representadas por funciones, cuyas gráficas son punteadas (porque tenemos un número finito de mediciones). Así, surge la pregunta, ¿cómo conocer la función f que describe completamente el fenómeno?, o bien, ¿cómo se genera una función alternativa g que interpole los datos obtenidos y sea lo más parecida a f ? De conseguir g , se puede obtener conocimiento en lugares donde no se ha podido medir, pero surgen distintas cuestiones matemáticas básicas, como son: la existencia y unicidad de g , las clases de funciones en las que se interpolará (polinómica, exponencial, trigonométrica, etc.). Si se considera que g es un polinomio de

grado menor o igual que n , entonces se está hablando de interpolación polinómica y en este caso existe un polinomio que aproxima a la función continua f con la precisión deseada, lo cual está garantizado por el siguiente teorema ([10], [13]).

Teorema 2.1. Aproximación de Weierstrass. *Dada f continua en $[a, b]$, para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $\forall x \in [a, b] : |f(x) - P(x)| < \epsilon$.*

A pesar de su gran valor teórico, el teorema anterior no brinda un método para calcular P , por lo que se recurre a distintos métodos que permiten construir polinomios de aproximación.

A partir de los polinomios de aproximación, cuyas integrales pueden calcularse fácilmente, se pueden obtener aproximaciones de la integral de una función. Esta es una estrategia de integración utilizada para deducir las construcciones de los MIN de Simpson 1/3 y 3/8. Otra estrategia consiste en aproximar la integral mediante la suma finita de áreas de polígonos. Esta última estrategia es utilizada para deducir las construcciones de los MIN del Punto Medio y del Trapecio. Estos cuatro MIN se presentan en la siguiente sección ([2], [5], [10], [13] [21]), así como su implementación en MATLAB.

Para determinar qué tan cerca está la integral exacta de una integral aproximada se calcula el Error Absoluto (EA) y Error Relativo (ER) como se muestra en las siguientes definiciones.

Definición 2.2. Sean $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y A_n el número dado por cualquier método de aproximación a la integral definida de f en el paso n . Se define el error absoluto EA_{A_n} como

$$EA_{A_n} = \left| \int_a^b f(x)dx - A_n \right|.$$

Definición 2.3. Sean $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y A_n el número dado por cualquier método de aproximación a la integral definida de f en el paso n y EA_{A_n} el error absoluto de A_n . Se define el error relativo ER_{A_n} como

$$ER_{A_n} = \left| \frac{EA_{A_n}}{\int_a^b f(x)dx} \right|.$$

En ambas definiciones se menciona *el paso n* , lo cual significa que el método numérico de integración considera n subintervalos en su aproximación ([2], [13]). Ahora, EA_{A_n} nos indica la separación que hay del valor exacto con el aproximado y aquí hay que realizar dos observaciones, la primera es que la aproximación puede ser mayor o menor que el valor exacto; en cambio, si únicamente nos interesa la distancia entre ambos, se considera el valor absoluto, que se denomina *error de aproximación*. La segunda observación está relacionada con el hecho, de que el error de aproximación solo podrá ser conocido cuando la integral definida se pueda calcular de forma exacta, mientras que el ER_{A_n} tiene el objetivo de indicar la cantidad de error respecto al valor exacto. Observe que si se multiplica ER_{A_n} por 100 entonces se obtiene el porcentaje del error y en la literatura en ocasiones lleva el nombre de *error relativo porcentual* o simplemente *error porcentual*. Para conocer más acerca de los tipos de errores se recomienda consultar las referencias [1], [5] y [16].

Respecto al EA, si denotamos la integral aproximada de los métodos del Punto Medio, del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8 compuestos por M_n , T_n , $S3_n$ y $S8_n$ en el paso n , respectivamente, entonces para una malla uniforme de longitud h en el intervalo $[a, b]$, se enuncian los teoremas que garantizan la convergencia y la velocidad de convergencia de los métodos ([2], [10], [21]).

Teorema 2.4. *Suponga que $|f''(x)| \leq K$ para $K \in \mathbb{R}$ y $x \in [a, b]$. Si EA_{M_n} denota el error absoluto del Método del Punto Medio, entonces la cota de error es de la forma*

$$EA_{M_n} \leq \frac{K(b-a)}{24}h^2.$$

Teorema 2.5. *Suponga que $|f''(x)| \leq K$ para $K \in \mathbb{R}$ y $x \in [a, b]$. Si EA_{T_n} denota el error absoluto del Método del Trapecio, entonces la cota de error está dada por*

$$EA_{T_n} \leq \frac{K(b-a)}{12}h^2.$$

Teorema 2.6. *Suponga que $|f^{(4)}(x)| \leq K$ para $K \in \mathbb{R}$ y $x \in [a, b]$. Si EA_{S3_n} y EA_{S8_n} denotan el error cometido por el Método de Simpson 1/3 Compuesto y el Método de Simpson 3/8 Compuesto, respectivamente, entonces las cotas de error están dadas por*

$$EA_{S3_n} \leq \frac{K(b-a)}{180}h^4 \quad \text{y} \quad EA_{S8_n} \leq \frac{K(b-a)}{80}h^4.$$

3 Construcción de los Métodos de Integración Numérica

Método del Punto Medio

Este método consiste en aproximar la integral definida de f por medio de una cuadratura que es la suma finita de áreas (positivas y/o negativas) de rectángulos, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)h_i, \quad (2)$$

donde n es el número de subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ en que es dividido $[a, b]$ y h_i es la longitud de cada uno de estos, para $i = 1, 2, \dots, n$. Cuando h es constante, se dice que se tiene una malla uniforme del intervalo $[a, b]$. El desarrollo de este método es un caso particular del concepto con el que se construye la integral definida, las *sumas de Riemann* ([20], [21]). La construcción del Método del Punto Medio para una malla uniforme del intervalo $[a, b]$ se desarrolla a continuación.

Construcción 3.1. Sea f una función continua en $[a, b]$ y n el número de subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de $[a, b]$, cada uno de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos la partición de $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, \dots, x_{n-1} = a+(n-1)h, x_n = b\} \quad (3)$$

y la selección \mathcal{A} de \mathcal{P} dada por

$$\mathcal{A} = \left\{ \xi_1 = \frac{x_0 + x_1}{2}, \xi_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, \xi_n = \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right\},$$

es decir, ξ_i es el punto medio entre x_{i-1} y x_i . Ahora bien, observe que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(\xi_i)$ y h son la altura y la base de un rectángulo. De esta manera, se forman n rectángulos, cuya suma de áreas da la cuadratura que aproxima a la integral definida ([2]). Esto se ilustra en la Figura 1.

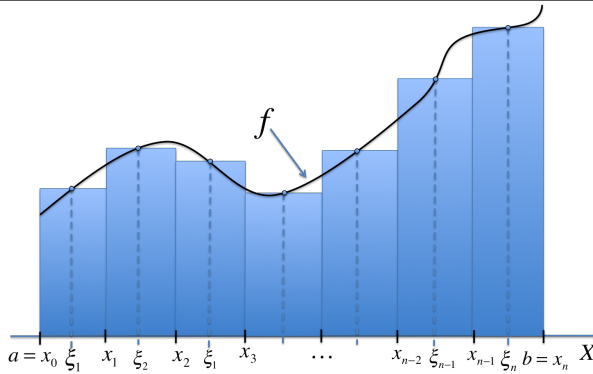


Figura 1: Ilustración del Método del Punto Medio.

Finalmente, el Método del Punto Medio para una malla uniforme del intervalo $[a, b]$ está dado por la expresión (2) con $h_i = \frac{b-a}{n}$.

Método del Trapecio

El Método del Trapecio se asemeja al Método del Punto Medio, pero en este caso se aproxima a la integral definida de f por medio de una cuadratura basada en la suma finita de áreas de trapecios, como se muestra en la Figura 2. Para una malla uniforme del intervalo $[a, b]$ su expresión está dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right). \quad (4)$$

Veamos su construcción.

Construcción 3.2. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, el cual se divide en n subintervalos, cada uno de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos la partición \mathcal{P} dada por (3). Para cada $i = 1, \dots, n$ se construye el trapecio con los dos puntos $p_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $p_i = (x_i, f(x_i))$ (ver la Figura 2) cuya área está dada por

$$A_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h, \quad (5)$$

y como es para cada $i = 1, \dots, n$ entonces se obtienen n áreas

$$A_{T_1} = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} h, \quad A_{T_2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} h, \quad \dots, \quad A_{T_n} = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} h.$$

Sumando estas áreas, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_{T_i} &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + f(x_n) \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right). \end{aligned}$$

Así, se obtiene el resultado (4).

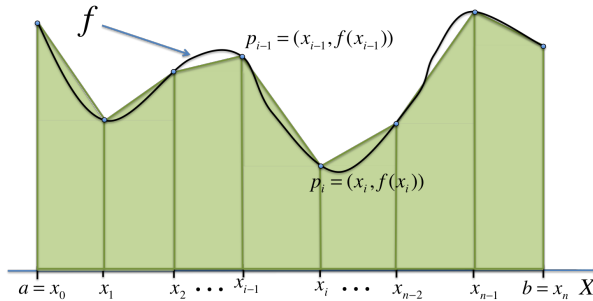


Figura 2: Ilustración del Método del Trapecio.

Método de Simpson 1/3

Los métodos de Simpson 1/3 simple y compuesto, aproximan a la integral de la función f por una cuadratura basada en la suma finita de integrales de funciones polinomiales de grado 2. A continuación se muestra la construcción detallada de cada cuadratura.

Forma simple

El Método de Simpson 1/3 simple, para una malla uniforme formada por tres puntos $\mathcal{P}_s = \{x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = b\}$ del intervalo $[a, b]$, está dado por

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f(a + h) + f(b) \right), \quad (6)$$

donde $h = \frac{b-a}{2}$. En seguida se muestra su construcción.

Construcción 3.3. Considere la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Note que a y b son los límites de integración. Se divide $[a, b]$ en $n = 2$ subintervalos, cada uno con la misma longitud, la cual está dada por $h = \frac{b-a}{2}$. En este caso, la partición de $[a, b]$ es: $\mathcal{P}_s = \{x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = b\}$. Luego, se consideran los tres puntos

$$\begin{aligned} p_0 &= (x_0, f(x_0)), \\ p_1 &= (x_1, f(x_1)), \\ p_2 &= (x_2, f(x_2)). \end{aligned}$$

por los cuales se hace pasar una función polinomial P de grado 2, como muestra la Figura 3.3(a).

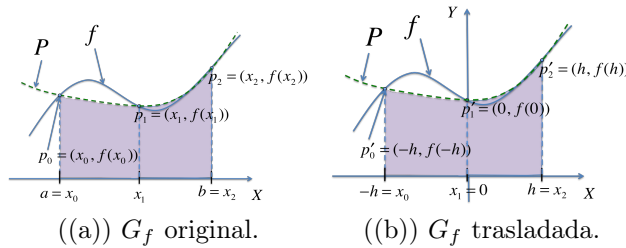


Figura 3: a) Ilustración del Método de Simpson 1/3 simple. b) Traslado de la gráfica G_f .

Denotemos por G_f a la gráfica de la función f . Para facilitar los cálculos posteriores, se recorre G_f de tal manera que $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$, tal como se muestra en la Figura 3.3(b). Esto es posible, ya que las áreas son las mismas. En este caso, se definen los puntos:

$$\begin{aligned} p'_0 &= (-h, f(-h)), \\ p'_1 &= (0, f(0)), \\ p'_2 &= (h, f(h)). \end{aligned}$$

Ahora se procede a encontrar la función P . Para ello, se necesita que P pase por p'_0 , p'_1 y p'_2 , es decir,

$$\begin{aligned} P(-h) &= f(x_0), \\ P(0) &= f(x_1), \\ P(h) &= f(x_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Luego, la forma general del polinomio es $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ con A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A \neq 0$. De (7) se encuentra el sistema de tres ecuaciones lineales con 3 incógnitas,

$$\begin{aligned} Ah^2 - Bh + C &= f(x_0), \\ C &= f(x_1), \\ Ah^2 + Bh + C &= f(x_2), \end{aligned}$$

cuya solución está dada por

$$A = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2h^2}, \quad B = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \quad \text{y} \quad C = f(x_1). \quad (8)$$

Integrando el polinomio P y haciendo uso del segundo Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h P(x) dx &= \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \left(A \frac{x^3}{3} + B \frac{x^2}{2} + Cx \right) \Big|_{-h}^h \\ &= \left(A \frac{h^3}{3} + B \frac{h^2}{2} + Ch \right) - \left(A \frac{(-h)^3}{3} + B \frac{(-h)^2}{2} + C(-h) \right) \\ &= A \frac{h^3}{3} + B \frac{h^2}{2} + Ch + A \frac{h^3}{3} - B \frac{h^2}{2} + Ch \\ &= 2A \frac{h^3}{3} + 2Ch, \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{-h}^h P(x) dx = \frac{2}{3} Ah^3 + 2Ch. \quad (9)$$

Sustituyendo los valores de (8) en (9) se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h P(x) dx &= \frac{2}{3} \left(\frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2h^2} \right) h^3 + 2f(x_1)h \\ &= \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{3} + \frac{6f(x_1)h}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Regresando a las variables originales, se halla

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} P(x)dx \\ &= \int_{-h}^h P(x)dx \\ &= \frac{1}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(f(a) + 4f(a+h) + f(b) \right). \end{aligned}$$

Finalmente, el Método de Simpson 1/3 simple indica

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^h P(x)dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f(a+h) + f(b) \right),$$

con lo que se verifica (6).

Forma compuesta

Considere la forma simple del Método de Simpson 1/3 y suponga ahora que el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos con $n > 2$ y par. Para construir el Método de Simpson 1/3 compuesto, la idea es aplicar $\frac{n}{2}$ veces la forma simple, de la cual ya se conoce una cuadratura. Esto se muestra en la Figura 4.

El Método de Simpson 1/3 compuesto en una malla uniforme del intervalo $[a, b]$ está dado por la expresión

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + f(b) \right), \quad (11)$$

donde, como se comentó anteriormente, $n > 2$ y par. Observe con detalle la construcción.

Construcción 3.4. Sean f una función continua en $[a, b]$ y $k \in \mathbb{N} - \{1\}$. $n = 2k$ es el número de subintervalos de $[a, b]$ con longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos

la partición $\mathcal{P}_c = \{x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = b\}$. Ahora, por las propiedades de la integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx.$$

Aplicando el Método de Simpson 1/3 simple en cada uno de los sumandos del lado derecho de la igualdad anterior se tiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} P_2(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} P_{\frac{n}{2}}(x)dx,$$

donde P_i , para $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$, son las funciones polinomiales de grado 2 del Método de Simpson 1/3 simple. De la igualdad anterior y (10) se halla

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_2} P_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} P_2(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} P_{\frac{n}{2}}(x)dx \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right) + \frac{h}{3} \left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right) + \dots \\ &+ \frac{h}{3} \left(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2}) + \right. \\ &4f(x_{n-1}) + f(x_n) \left. \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + \right. \\ &4f(x_{n-1}) + f(x_n) \left. \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \left[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) \right] + 2 \left[f(x_2) + f(x_4) + \dots \right. \right. \\ &\left. \left. + f(x_{n-2}) \right] + f(b) \right). \end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})$$

y

$$\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2}),$$

de donde se llega a que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + f(b) \right),$$

que es el resultado indicado en (11).

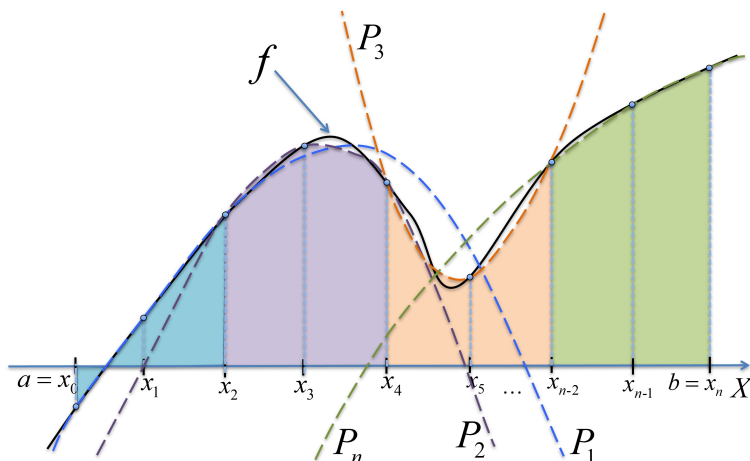


Figura 4: Ilustración del Método de Simpson 1/3 compuesto.

Método de Simpson 3/8

Para este método también tendremos la forma simple y compuesta, cada una sigue la misma estrategia que se aplica en el Método de Simpson 1/3, pues la integral definida se aproxima a una cuadratura basada en la suma finita de integrales de funciones polinomiales de grado 3. En este caso, se presenta un esbozo de las construcciones, pues cada una es análoga a las dadas en el método presentado anteriormente.

Forma simple

El método indica

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} \left(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b) \right). \quad (12)$$

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, el cual se divide en 3 subintervalos con la misma longitud $h = \frac{b-a}{3}$, como se muestra en la Figura 3.5(a). Consideremos la partición $\mathcal{P}_s = \{x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, x_3 = b\}$. Por los puntos

$$\begin{aligned} p_0 &= (x_0, f(x_0)), \\ p_1 &= (x_1, f(x_1)), \\ p_2 &= (x_2, f(x_2)), \\ p_3 &= (x_3, f(x_3)). \end{aligned}$$

se hace pasar una función polinomial de grado 3, es decir, $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Ahora, se aplica una traslación de la función, como se muestra en la Figura 3.5(b), para simplificar los cálculos posteriores. Sean

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{3}{2}h\right) &= f(x_0), \\ P\left(-\frac{1}{2}h\right) &= f(x_1), \\ P\left(\frac{1}{2}h\right) &= f(x_2), \\ P\left(\frac{3}{2}h\right) &= f(x_3), \end{aligned}$$

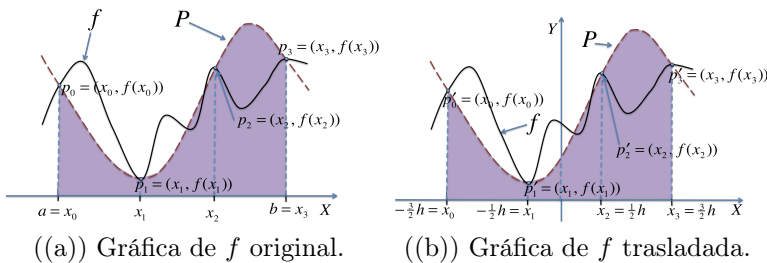


Figura 5: a) Ilustración del Método de Simpson 3/8 simple. b) Traslado de la gráfica G_f .

de lo cual resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales de 4×4

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{3}{2}h\right)^3 - B\left(-\frac{3}{2}h\right)^2 + C\left(-\frac{3}{2}h\right) + D &= f(x_0), \\ A\left(-\frac{1}{2}h\right)^3 - B\left(-\frac{1}{2}h\right)^2 + C\left(-\frac{1}{2}h\right) + D &= f(x_0), \\ A\left(\frac{1}{2}h\right)^3 - B\left(\frac{1}{2}h\right)^2 + C\left(\frac{1}{2}h\right) + D &= f(x_0), \\ A\left(\frac{3}{2}h\right)^3 - B\left(\frac{3}{2}h\right)^2 + C\left(\frac{3}{2}h\right) + D &= f(x_0), \end{aligned} \tag{13}$$

de cuya solución hallamos

$$\int_{-\frac{3}{2}h}^{\frac{3}{2}h} P(x)dx = \frac{9Bh^3 + 12Dh}{4} = \frac{3h}{8} \left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right), \tag{14}$$

que corresponde al Método de Simpson 3/8 simple dado en (12).

Forma compuesta

En el Método de Simpson 3/8 compuesto se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} \left(f(a) + 3 \sum_{i=0}^{(n-3)/3} f(x_{3i+1}) + 3 \sum_{i=0}^{(n-3)/3} f(x_{3i+2}) + 2 \sum_{i=1}^{(n-3)/3} f(x_{3i}) + f(b) \right), \tag{15}$$

cuya deducción es también análoga a la forma compuesta de Simpson 1/3. En este caso, el número de subintervalos n tiene que ser un múltiplo de 3, es decir, $n = 3k$ para algún $k \in \mathbb{N} - \{1\}$, cada uno de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos la partición es $\mathcal{P}_c = \{x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = b\}$. Ahora bien, se puede ver que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx.$$

Si en cada uno de estos sumandos aplicamos el Método de Simpson 3/8 simple, se obtiene la aproximación mostrada en (15). Para hallar este resultado se realizan cálculos análogos a la Sección 3. En la Figura 6, se ilustra este método aplicando el método simple en los subintervalos del mismo color.

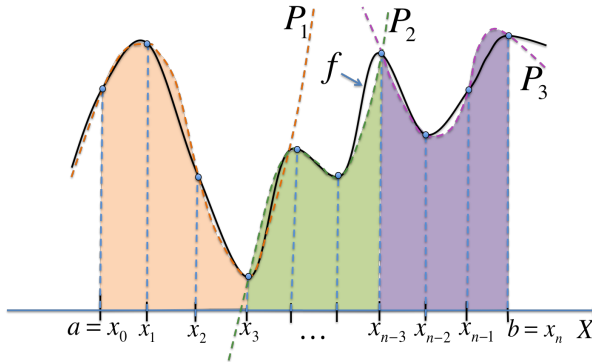


Figura 6: Ilustración del Método de Simpson 3/8 compuesto.

4 Implementación computacional de los Métodos de Integración Numérica

En esta sección se muestra el código fuente MATLAB ([15]) correspondiente a los cuatro métodos mencionados en este trabajo. Cada programa tiene en la parte final una sección donde se pueden calcular los errores absoluto, relativo y porcentual siempre que se conozca el valor exacto de la integral. También pueden utilizarse estos errores para conocer qué tan cerca se está de otras aproximaciones. Estos programas se pueden descargar en la siguiente liga: <https://github.com/JoseJulioCondeMones/Programas-de-integracion>, los cuales son utilizados en la Sección 5.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PRIMER PROGRAMA: METODO DEL PUNTO MEDIO %%%%%%%%%%%%%%%

fprintf('\n "INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO DEL PUNTO MEDIO"\n\n');

Exp_f = input('Ingrese la funcion: f(x) = ', 's');
f = inline(Exp_f);

a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo: a = ');
b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo: b = ');

while a > b
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que a tiene que ser menor que b.\n\n');
    a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo: a = ');
    b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo: b = ');
end
    
```

```

fprintf('Escriba el numero de subintervalos para [%d,%d]:   n = ',a,b);
n = input(' ');

h = (b-a)/n;
x = a:h:b;
suma = 0;

for i=1:n
    punto_medio = ( x(i)+x(i+1) )/2;
    altura = feval(f,punto_medio);
    suma = suma+(h*altura);
end

int_aprox_f = suma;

fprintf('\n Considerando %d subintervalos, la longitud de la malla regular
        es h = %4.5f \n',n,h);
fprintf('\n La integral aproximada de la funcion f en [%d,%d] es: %4.10f
        \n\n',a,b, int_aprox_f);

E=input('Si quiere calcular el error, ingrese "1", de lo contrario,
        ingrese cualquier otro numero: ');

if E == 1
    fprintf('\n Si existe la integral exacta de f(x) en [%d,%d] puedes
            calcular los errores cometidos en este Metodo Numerico.\n',a,b);

    integral_exacta = input('Ingrese el valor de la Integral Exacta:
                            Integral_Exacta = ');

    Error_Absoluto = abs(integral_exacta - int_aprox_f);
    Error_Relativo = Error_Absoluto / abs(integral_exacta);
    Error_Porcentual = Error_Relativo*100;

    fprintf('\n El error cometido por el Metodo de Riemann es: \n');
    fprintf('        ERROR ABSOLUTO = %4.10f \n',Error_Absoluto);
    fprintf('        ERROR RELATIVO = %4.10f \n',Error_Relativo);
    fprintf('        ERROR PORCENTUAL = %4.10f por ciento \n',Error_Porcentual);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%—— SEGUNDO PROGRAMA: METODO DEL TRAPECIO %%%%%%%%%%%%%%%

fprintf('\n "INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO DEL  TRAPECIO"\n\n');

Exp_f = input('Ingrese la funcion a integrar f(x): ', 's');

a = input('Escriba el valor del extremo izquierdo del intervalo "a":   ');
b = input('Escriba el valor del extremo derecho del intervalo "b":   ');

while a > b
    fprintf('\n Advertencia: El valor de "a" tiene que ser menor que "b".\n\n');
    a = input('Escriba otra vez el valor del extremo izquierdo del intervalo
"a": ');
    b = input('Escriba otra vez el valor del extremo derecho del intervalo "b": ');
end

```

```
n = input('Escriba el numero "n" de subintervalos para [a,b]: ');
while n < 1
    fprintf('\n Advertencia: El valor de "n" debe ser mayor que cero.\n\n');
    n = input('Escriba nuevamente el numero "n" de subintervalos para [a,b]: ');
end

h = (b-a)/n;
x_i = a:h:b;

fprintf('\n Considerando %d subintervalos, la longitud de la malla regular es
      h= %4.10f \n',n,h);

Suma = 0;
Suma = Suma + feval(f,x_i(1))*h/2; % donde h=(b-a)/n.

for i = 2:n
    Suma = Suma + feval(f,x_i(i))*h; % donde h=(b-a)/n.
end

Suma = Suma + feval(f,x_i(n+1))*h/2; % donde h=(b-a)/n.
int_aprox_f = Suma;

fprintf('\n La integral aproximada de la funcion f en [%d,%d] es: %4.10f
      \n\n', a, b, int_aprox_f);

E = input('Si quiere calcular el error, ingrese
"1", de lo contrario, ingrese cualquier otro numero: ');
if E == 1
    fprintf('\n Si existe la integral exacta de f(x) en [%d,%d] puedes calcular
los errores cometidos en este Metodo Numerico.\n',a,b);

    integral_exacta=input('Ingrese el valor de la Integral
Exacta: Integral Exacta= ');

    Error_Absoluto = abs( integral_exacta - int_aprox_f);
    Error_Relativo = Error_Absoluto / abs(integral_exacta);
    Error_Porcentual = Error_Relativo*100;

    fprintf('\n El error cometido por el Metodo del Trapecio es: \n');
    fprintf('      ERROR ABSOLUTO = %4.10f \n',Error_Absoluto);
    fprintf('      ERROR RELATIVO = %4.10f \n',Error_Relativo);
    fprintf('      ERROR PORCENTUAL = %4.10f por ciento \n',Error_Porcentual);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TERCER PROGRAMA: METODO DE SIMPSON 1/3 %%%%%%%%%%%%%%%

fprintf('\n "INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO DE SIMPSON 1/3"\n\n');

Exp_f = input('Ingrese la funcion: f(x) = ', 's');
f = inline(Exp_f);

a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo: a = ');
```

```

b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo:  b = ');

while a > b
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que a tiene que ser menor que b.\n\n');
    a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo:  a = ');
    b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo:  b = ');
end

fprintf('Escriba el numero par de subintervalos para [%d,%d]:  n = ',a,b);
n = input(' ');
m = mod(n,2);

while m == 1
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que n debe ser par.\n\n');
    fprintf('Escriba nuevamente el numero n de subintervalos para
    [%d,%d]:  n = ',a,b);
    n = input(' ');
    m = mod(n,2);
end

h = (b-a)/n;
y = a:h:b;

if n == 2
    int_aprox_f = (h/3)*(feval(f,y(1))+4*feval(f,y(2))+feval(f,y(3)));
else
    alpha = 0;
    betha = 0;
    for i = 1:(n/2);
        alpha = alpha+feval(f,y(2*i));
    end
    for i = 1:((n-2)/2);
        betha = betha+feval(f,y(2*i+1));
    end
    int_aprox_f = (h/3)*(feval(f,y(1))+4*alpha+2*betha+feval(f,y(n+1)));
end

fprintf('\n Considerando %d subintervalos , la longitud de cada uno es
h = %4.10f \n',n,h);
fprintf('\n La integral aproximada de la funcion f(x) en [%d,%d] es: %4.10f
\n\n',a,b, int_aprox_f);

E = input('Si quiere calcular el error , ingrese "1", de lo contrario ingrese
cualquier otro numero: ');

if E == 1
fprintf('\n Si existe la integral exacta de f(x) en [%d,%d] puedes calcular
los errores cometidos en este Metodo Numerico.\n',a,b);

integral_exacta = input('Ingrese el valor de la Integral Exacta: Integral
Exacta = ');

Error_Absoluto = abs( integral_exacta - int_aprox_f);
Error_Relativo = Error_Absoluto / abs(integral_exacta);
Error_Porcentual = Error_Relativo*100;

```

```
fprintf('\n El error cometido por el Metodo del Trapecio es: \n');
fprintf('      ERROR ABSOLUTO = %4.10f \n',Error_Absoluto);
fprintf('      ERROR RELATIVO = %4.10f \n',Error_Relativo);
fprintf('      ERROR PORCENTUAL = %4.10f por ciento \n',Error_Porcentual);
end
```

%% CUARTO PROGRAMA: METODO DE SIMPSON 3/8 %%%

```
fprintf('\n "INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO DE SIMPSON 3/8"\n\n');

Exp_f = input('Ingrese la funcion: f(x) = ', 's');
f = inline(Exp_f);

a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo: a = ');
b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo: b = ');

while a > b
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que a tiene que ser menor que b.\n\n');
    a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo: a = ');
    b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo: b = ');
end

fprintf('Escriba el numero multiplo de 3 de subintervalos para [%d,%d]:\n', a, b);
n = input(' ');
m = mod(n,3);

while m ~= 0
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que "n" tiene que ser multiplo de 3.\n\n');
    n = input('Escriba nuevamente el numero n de subintervalos para [a,b]: ');
    m = mod(n,3);
end

h = (b-a)/n;
y = a:h:b;

if n == 3
    int_aprox_f = ((3*h)/8)*(feval(f,y(1))+3*feval(f,y(2))+3*feval(f,y(3))+
        feval(f,y(4))); \line\break
    else
        alpha = 0;
        betha = 0;
        gamma = 0;
        for i = 1:n/3;
            alpha = alpha+feval(f,y((3*i)-1));
        end
        for i = 1:n/3;
            betha = betha+feval(f,y(3*i));
        end
        for i = 1:(n-3)/3;
            gamma = gamma+feval(f,y((3*i)+1));
        end
        int_aprox_f = ((3*h)/8)*(feval(f,y(1))+3*alpha+3*betha+2*gamma+
            feval(f,y(n+1)));
```

```

end

fprintf('\n Considerando %d subintervalos , la longitud de cada uno es de
        %4.10f \n', n, h);
fprintf('\n La integral aproximada de la funcion f en [a,b] es: %4.15f
        \n\n', int_aprox_f);

E = input('Si quiere calcular el error , ingrese "1", de lo contrario , ingrese
        cualquier otro numero: ');

if E == 1
fprintf('\n ni existe la integral exacta de f(x) en [%d,%d] puedes calcular los
errores cometidos en este Metodo Numerico.\n', a, b);

integral_exacta = input('Ingrese el valor de la Integral Exacta: Integral
        Exacta = ');

Error_Absoluto = abs(integral_exacta - int_aprox_f);
Error_Relativo = Error_Absoluto / abs(integral_exacta);
Error_Porcentual = Error_Relativo*100;

fprintf('\nEl error cometido por el Metodo del Trapecio es: \n');
fprintf('        ERROR ABSOLUTO = %4.10f \n', Error_Absoluto);
fprintf('        ERROR RELATIVO = %4.10f \n', Error_Relativo);
fprintf('        ERROR PORCENTUAL = %4.10f por ciento \n', Error_Porcentual);
end

```

5 Resultados numéricos

Cuando se programa un algoritmo en algún lenguaje de programación, se tiene que probar y calibrar por medio de ejemplos donde se conoce la solución exacta o analítica y de esta forma comprobar su factibilidad y eficiencia. Para los MIN desarrollados en este trabajo e implementados en MATLAB, se proporcionan ejemplos de funciones en donde se calculó la integral de manera exacta y comparó contra la integral aproximada.

A continuación, se muestran los resultados de las pruebas realizadas para los métodos presentados en la Sección 2 respecto a funciones cuya integral en $[0, 1]$ es posible conocer de manera exacta.

En los ejemplos numéricos, se consideran el EA y el ER, los cuales están dados por las definiciones 2.2 y 2.3. Recordemos que M_n , T_n , $S3_n$ y $S8_n$ denotan las integrales aproximadas dadas por los métodos del Punto Medio, del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8, respectivamente, donde el subíndice n

es el número de subintervalos en que es dividido el intervalo $[a, b]$, como se menciona en la Sección 2.

Caso de estudio 1: Resultados numéricos para funciones polinomiales.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(x) = 3x$ en $[0, 1]$, cuya integral exacta es

$$\int_0^1 3x \, dx = \frac{3}{2} = 1.5. \tag{16}$$

En este caso, se obtienen las integrales aproximadas presentadas en la Tabla 1 para diferentes valores de n , en donde se observa que los cuatro MIN devuelven resultados aceptables, incluso para el valor más pequeño de $n = 6$, ya que los errores relativos y absolutos son cero o prácticamente cero. En particular, para el Método del Trapecio los errores relativos son cero porque el integrando es una función lineal y esta cuadratura utiliza polinomios lineales a trozos para interpolar al integrando. También se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos aumentan cuando se incrementa el valor de n como se esperaría, y el tiempo es menor para Trapecio y el mayor de todos es para el Punto Medio cuando $n = 3000$.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.5000e+00	2.2204e-16	1.4803e-16	0.001115 s	6	1.6667e-01	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.001716 s
30	3.3333e-02	1.5000e+00	2.2204e-16	1.4803e-16	0.002406 s	30	3.3333e-02	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.003125 s
300	3.3333e-03	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.019848 s	300	3.3333e-03	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.020607 s
3000	3.3333e-04	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.179213 s	3000	3.3333e-04	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.177864 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002211 s	6	1.6667e-01	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002496 s
30	3.3333e-02	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002986 s	30	3.3333e-02	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.003136 s
300	3.3333e-03	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.020251 s	300	3.3333e-03	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.020151 s
3000	3.3333e-04	1.5000e+00	2.2204e-16	1.4803e-16	0.178858 s	3000	3.3333e-04	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.178654 s

Cuadro 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 2. Para la función $f(x) = 5x^2$ definida en $[0, 1]$, su integral exacta está dada por

$$\int_0^1 5x^2 \, dx = \frac{5}{3} \approx 1.6666666666666667. \tag{17}$$

En la Tabla 2, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n , en donde se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan muy bien la integral de f , incluso para cuando $n = 6$. En particular, los errores absolutos y relativos son cero para Simpson 1/3 cuando $n = 6$ y 30, ya que f es una función polinomial de segundo grado y de este tipo de funciones son los interpolantes del Método de Simpson 1/3. En Simpson 1/3, cuando $n = 300$ y 3000 los errores no son cero, lo cual puede deberse a posibles errores de truncamiento o redondeo de cálculos aritméticos de la computadora; sin embargo, son muy pequeños comparados contra los errores obtenidos por Punto Medio y Trapecio. Como en el ejemplo anterior, se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos aumentan cuando se incrementa el valor de n como se esperaría, y el tiempo es menor para Punto Medio y mayor para Simpson 1/3 cuando $n = 3000$.

Punto Medio						Trapecio					
[gray]9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray]9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.6551e+00	1.1574e-02	6.9444e-03	0.001069 s	6	1.6667e-01	1.6898e+00	2.3148e-02	1.3889e-02	0.001852 s
30	3.3333e-02	1.6662e+00	4.6296e-04	2.7778e-04	0.002994 s	30	3.3333e-02	1.6676e+00	9.2593e-04	5.5556e-04	0.003332 s
300	3.3333e-03	1.6667e+00	4.6296e-06	2.7778e-06	0.020907 s	300	3.3333e-03	1.6676e+00	9.2593e-06	5.5556e-06	0.020379 s
3000	3.3333e-04	1.6667e+00	4.6296e-08	2.7778e-08	0.178745 s	3000	3.3333e-04	1.6676e+00	9.2593e-08	5.5556e-08	0.179772 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray]9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray]9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.6667e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002000 s	6	1.6667e-01	1.6667e+00	2.2204e-16	1.3323e-16	0.002981 s
30	3.3333e-02	1.6667e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002933 s	30	3.3333e-02	1.6667e+00	2.2204e-16	1.3323e-16	0.003249 s
300	3.3333e-03	1.6667e+00	2.2204e-16	1.3323e-16	0.020085 s	300	3.3333e-03	1.6667e+00	2.2204e-16	1.3323e-16	0.021361 s
3000	3.3333e-04	1.6667e+00	6.6613e-16	3.9968e-16	0.184041 s	3000	3.3333e-04	1.6667e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.179392 s

Cuadro 2: Resultados numéricos del Ejemplo 2 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 3. Consideremos a la función $f(x) = 3x^3$ definida en $[0, 1]$. Su integral exacta es

$$\int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4} = 0.75. \tag{18}$$

En la Tabla 3, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n para cada una de las cuadraturas. En este caso, también se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan muy bien la integral de f , incluso para cuando $n = 6$ como en el ejemplo anterior. En particular, los errores absolutos y relativos son cero para Simpson 3/8 con $n = 6, 30,$ y 300, ya que f es una función polinomial de tercer grado y de este tipo de funciones son los

interpolantes del Método de Simpson 3/8. Para $n = 3000$ los errores no son cero, lo cual puede deberse a redondeo o truncamiento de cálculos aritméticos de la computadora. Además, también se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos aumentan cuando se incrementa el valor de n .

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	7.3958e-01	1.0417e-02	1.3889e-02	0.001656 s	6	1.6667e-01	7.7083e-01	2.0833e-02	2.7778e-02	0.002089 s
30	3.3333e-02	7.4958e-01	4.1667e-04	5.5556e-04	0.002790 s	30	3.3333e-02	7.5083e-01	8.3333e-04	1.1111e-03	0.003093 s
300	3.3333e-03	7.5000e-01	4.1667e-06	5.5556e-06	0.019442 s	300	3.3333e-03	7.5001e-01	8.3333e-06	1.1111e-05	0.020532 s
3000	3.3333e-04	7.5000e-01	4.1667e-08	5.5556e-08	0.179294 s	3000	3.3333e-04	7.5000e-01	8.3333e-08	1.1111e-07	0.178431 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	SS_n	EA_{SS_n}	ER_{SS_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	SS_n	EA_{SS_n}	ER_{SS_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.001902 s	6	1.6667e-01	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002129 s
30	3.3333e-02	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.003636 s	30	3.3333e-02	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.003112 s
300	3.3333e-03	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.019638 s	300	3.3333e-03	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.019814 s
3000	3.3333e-04	7.5000e-01	1.1102e-16	1.4803e-16	0.176823 s	3000	3.3333e-04	7.5000e-01	2.2204e-16	2.9606e-16	0.184508 s

Cuadro 3: Resultados numéricos del Ejemplo 3 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 4. Para este ejemplo, consideremos a la función $f(x) = x^4$ definida en $[0, 1]$. Su integral exacta es

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} = 0.2. \tag{19}$$

En la Tabla 4, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan en este trabajo. En este caso, también se observa que el Método de Simpson 1/3 aproxima mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros métodos aplicados, incluso para el valor más pequeño de $n = 6$. Esto puede deberse a que la función f es un polinomio de grado par y por esto es mejor interpolado por los interpolantes del Método de Simpson 1/3. Como los ejemplos previos, también se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos incrementan cuando aumenta el valor de n .

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.9539e-01	4.6071e-03	2.3036e-02	0.001126 s	6	1.6667e-01	2.0923e-01	9.2335e-03	4.6168e-02	0.001895 s
30	3.3333e-02	1.9981e-01	1.8515e-04	9.2575e-04	0.002708 s	30	3.3333e-02	2.0037e-01	3.7033e-04	1.8516e-03	0.003453 s
300	3.3333e-03	2.0000e-01	1.8518e-06	9.2592e-06	0.019252 s	300	3.3333e-03	2.0000e-01	3.7037e-06	1.8518e-05	0.021577 s
3000	3.3333e-04	2.0000e-01	1.8519e-08	9.2593e-08	0.173846 s	3000	3.3333e-04	2.0000e-01	3.7037e-08	1.8519e-07	0.180970 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	S3 _n	EA _{S3_n}	ER _{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	S8 _n	EA _{S8_n}	ER _{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	2.0010e-01	1.0288e-04	5.1440e-04	0.001994 s	6	1.6667e-01	2.0023e-01	2.3148e-04	1.1574e-03	0.002685 s
30	3.3333e-02	2.0000e-01	1.6461e-07	8.2305e-07	0.004792 s	30	3.3333e-02	2.0000e-01	3.7037e-07	1.8519e-06	0.003008 s
300	3.3333e-03	2.0000e-01	1.6461e-11	8.2304e-11	0.021169 s	300	3.3333e-03	2.0000e-01	3.7037e-11	1.8519e-10	0.020263 s
3000	3.3333e-04	2.0000e-01	1.6376e-15	8.1879e-15	0.178329 s	3000	3.3333e-04	2.0000e-01	3.7748e-15	1.8874e-14	0.177563 s

Cuadro 4: Resultados numéricos del Ejemplo 4 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 5. En este caso, consideremos a la función polinomial de grado siete dada por $f(x) = -7x^7 + 5x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + 1$ definida en $[0, 1]$. Su integral exacta está dada por

$$\int_0^1 (-7x^7 + 5x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + 1)dx = \frac{271}{840} = 0.322619047619048 \quad (20)$$

En la Tabla 5, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas presentadas aquí. También se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos incrementan cuando aumenta el valor de n .

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M _n	EA _{M_n}	ER _{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T _n	EA _{T_n}	ER _{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	3.5988e-01	3.7264e-02	1.1551e-01	0.001236 s	6	1.6667e-01	2.4729e-01	7.5325e-02	2.3348e-01	0.001526 s
30	3.3333e-02	3.2415e-01	1.5263e-03	4.7309e-03	0.002897 s	30	3.3333e-02	3.1957e-01	3.0538e-03	9.4658e-03	0.003314 s
300	3.3333e-03	3.2262e-01	1.5278e-05	4.7355e-05	0.019809 s	300	3.3333e-03	3.2259e-01	3.0555e-05	9.4710e-05	0.020651 s
3000	3.3333e-04	3.2262e-01	1.5278e-07	4.7355e-07	0.178697 s	3000	3.3333e-04	3.2262e-01	3.0556e-07	9.4711e-07	0.179638 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	S3 _n	EA _{S3_n}	ER _{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	S8 _n	EA _{S8_n}	ER _{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	3.1852e-01	4.0962e-03	1.2697e-02	0.001942 s	6	1.6667e-01	3.1385e-01	8.7687e-03	2.7180e-02	0.002539 s
30	3.3333e-02	3.2261e-01	6.8597e-06	2.1263e-05	0.004512 s	30	3.3333e-02	3.2260e-01	1.5406e-05	4.7752e-05	0.003994 s
300	3.3333e-03	3.2262e-01	6.8723e-10	2.1302e-09	0.021591 s	300	3.3333e-03	3.2262e-01	1.5462e-09	4.7928e-09	0.020313 s
3000	3.3333e-04	3.2262e-01	6.8445e-14	2.1216e-13	0.186657 s	3000	3.3333e-04	3.2262e-01	1.5432e-13	4.7834e-13	0.182323 s

Cuadro 5: Resultados numéricos del Ejemplo 5 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

De las Tablas 4 y 5 se observa que al hacer una comparativa entre el Método del Punto Medio y el del Trapecio, el error absoluto es del mismo orden, para los distintos valores de n . En ambos casos, se tiene más o menos la misma cantidad de ceros después del punto decimal, sin embargo, el Método del Punto Medio resulta ser más preciso que el del Trapecio. Esto no

ocurre con respecto a los métodos de Simpson, ya que Simpson 1/3 muestra un error absoluto más pequeño. Esto es congruente con los resultados dados en los teoremas 2.4 y 2.5, los cuales se enunciaron en la Sección 2.

Considerando *las cotas de error de las integrales aproximadas*, de los teoremas 2.4 y 2.5, y tomando los resultados de la Tabla 4, se verifican los resultados obtenidos. Para ilustrar, se toman $n = 3000$ y $h = \frac{b-a}{n}$. Para otros valores de n es análogo.

- Consideremos a la función $f(x) = x^4$ en $[0, 1]$. Se tiene que $|f''(1)| = 12 \geq |f''(x)|, \forall x \in [0, 1]$. Tomemos $K = 12$ en los teoremas 2.4 y 2.5, de donde se halla

$$EA_{M_n} \leq \frac{12}{24} \left(\frac{1}{3000} \right)^2 = \frac{1}{2(3000)^2} \approx 5.5555 \times 10^{-8},$$

y

$$EA_{T_n} \leq \frac{12}{12} \left(\frac{1}{3000} \right)^2 = \frac{1}{3000^2} \approx 1.1111 \times 10^{-7}.$$

Así, de la Tabla 4 se observa que $EA_{M_n} = 1.8519 \times 10^{-8} \leq 5.5555 \times 10^{-8}$ y $EA_{T_n} = 3.7037 \times 10^{-8} \leq 1.1111 \times 10^{-7}$.

- Para esta misma función $f(x) = x^4$ en $[0, 1]$, se tiene que $|f^{(4)}| = 24 \geq |f^{(4)}(x)|, \forall x \in [0, 1]$. Tomando $K = 25$ en el Teorema 2.6 se halla

$$EA_{S3_n} \leq \frac{25(1)}{180} \left(\frac{1}{3000} \right)^4 \approx 1.7146 \times 10^{-15},$$

$$EA_{S8_n} \leq \frac{25(1)}{80} \left(\frac{1}{3000} \right)^4 \approx 3.8580 \times 10^{-15}.$$

Si se revisan los resultados de la Tabla 4, también se verifica que $EA_{S3_n} = 1.6376 \times 10^{-15} \leq 1.7146 \times 10^{-15}$ y $EA_{S8_n} = 3.7748 \times 10^{-15} \leq 3.8580 \times 10^{-15}$.

Por lo visto anteriormente, una pregunta que surge es la siguiente: ¿Qué tan grande debe ser n , o bien, qué tan pequeño debe ser h , para obtener un error absoluto menor o igual que alguna tolerancia dada ϵ para la función f ? Desde luego, se requiere que ϵ sea muy pequeño, lo cual llevaría a que la aproximación encontrada por los MIN sea más precisa. En el siguiente ejemplo se muestra el uso de los Teoremas 1, 2 y 3, dando así una respuesta a la

pregunta anterior.

Ejemplo 6. Consideremos a la función $f(x) = \text{sen}(x)$. Se calculará su integral en $[0, \pi]$ por medio del Método de Simpson 1/3. Vamos a encontrar n para garantizar que EA_{S_3n} sea menor a 0.00001. Se tiene que $|f^{(4)}(x)| = |\text{sen}(x)| = \text{sen}(x) \leq 1$, para toda $x \in [0, \pi]$. Así, se propone $K = 1$ y del Teorema 3

$$EA_{S_3n} \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 = \frac{\pi}{180} h^4.$$

Si se elige $\epsilon = 0.00001 = 1 \times 10^{-5}$ y se pide que n satisfaga $\frac{\pi}{180} h^4 = \frac{\pi^5}{180n^4} \leq \epsilon$, entonces

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{\pi^5}{180\epsilon}} \approx 20.3058. \quad (21)$$

Hay que recordar que para Simpson 1/3, n tiene que ser un múltiplo de 2, por tanto, si se considera n a partir del 22 se obtiene una aproximación menor a $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ y en efecto, el programa nos indica

$$\int_0^\pi \text{sen}(x) dx = 2 \approx 2.000004631498475 = S_{322},$$

lo que lleva a

$$EA_{S_{322}} = 4.6315 \times 10^{-6} < \epsilon,$$

con un tiempo de cálculo o de ejecución del programa de 0.002506 s. En complemento al ejemplo anterior, para el resto de los métodos y para $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ se tiene lo siguiente:

- Punto Medio: A partir de $n = 359$,

$$\int_0^\pi \text{sen}(x) dx \approx 2.000006381614593 = M_{359}, EA_{M_{359}} = 6.3816 \times 10^{-6} < \epsilon,$$

con un tiempo de cálculo o de ejecución del programa de 0.023398 s.

- Trapecio: A partir de $n = 508$,

$$\int_0^\pi \text{sen}(x) dx \approx 2.000004631498475 = T_{508}, EA_{T_{508}} = 6.3741 \times 10^{-6} < \epsilon,$$

con un tiempo de cálculo o de ejecución del programa de 0.032803 s.

- Simpson 3/8: A partir de $n = 27$,

$$\int_0^\pi \text{sen}(x)dx \approx 2.000004631498475 = S_{8_{27}}, EA_{S_{8_{27}}} = 4.5971 \times 10^{-6} < \epsilon,$$

con un tiempo de cálculo o de ejecución del programa de 0.002781 s.

De lo anterior, se observa que el método de Simpson 1/3 es más eficiente, pues necesita de menos subintervalos para obtener la precisión que se busca y consume menos tiempo de ejecución para obtener la aproximación.

Caso de estudio 2: Resultados numéricos para funciones no polinomiales con antiderivada elemental.

En esta sección, se muestran resultados numéricos para algunas funciones no polinomiales que tienen antiderivada explícita, lo que permite determinar sus integrales exactas y compararlas con las integrales aproximadas calculadas por los MIN presentados en la Sección 2.

Ejemplo 7. Para este ejemplo, consideremos a la función $f(x) = \text{csc}(x)\cot(x)$ definida en $[1, 2]$. Su antiderivada (salvo constantes) está dada por $\frac{1}{\text{sen}(x)}$. Así,

$$\int_1^2 \text{csc}(x)\cot(x) dx = \frac{1}{\text{sen}(1)} - \frac{1}{\text{sen}(2)} \approx 0.088644935483505. \quad (22)$$

En la Tabla 6, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan en este trabajo. En este caso, se observa que el Método de Simpson 1/3 aproxima mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros métodos aplicados. Incluso, para $n = 6$ (que es un valor relativamente pequeño) el error relativo es 4.9255×10^{-4} , que puede considerarse aceptable para algunos problemas.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	8.7952e-02	6.9314e-04	7.8193e-03	0.001006 s	6	1.6667e-01	9.0040e-02	1.3952e-03	1.5739e-02	0.001916 s
30	3.3333e-02	8.8617e-02	2.8125e-05	3.1728e-04	0.003014 s	30	3.3333e-02	8.8701e-02	5.6265e-05	6.3472e-04	0.003112 s
300	3.3333e-03	8.8645e-02	2.8142e-07	3.1747e-06	0.021999 s	300	3.3333e-03	8.8645e-02	5.6284e-07	6.3494e-06	0.021537 s
3000	3.3333e-04	8.8645e-02	2.8142e-09	3.1747e-08	0.196200 s	3000	3.3333e-04	8.8645e-02	5.6284e-09	6.3494e-08	0.195485 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	S _{3n}	EA _{S_{3n}}	ER _{S_{3n}}	Tiempo	[gray].9 n	h	S _{8n}	EA _{S_{8n}}	ER _{S_{8n}}	Tiempo
6	1.6667e-01	8.8689e-02	4.3662e-05	4.9255e-04	0.002453 s	6	1.6667e-01	8.8735e-02	8.9672e-05	1.0116e-03	0.002863 s
30	3.3333e-02	8.8645e-02	7.7816e-08	8.7784e-07	0.003356 s	30	3.3333e-02	8.8645e-02	1.7422e-07	1.9654e-06	0.003329 s
300	3.3333e-03	8.8645e-02	7.8201e-12	8.8218e-11	0.022059 s	300	3.3333e-03	8.8645e-02	1.7595e-11	1.9848e-10	0.021929 s
3000	3.3333e-04	8.8645e-02	3.7470e-16	4.2270e-15	0.194413 s	3000	3.3333e-04	8.8645e-02	1.6792e-15	1.8943e-14	0.195914 s

Cuadro 6: Resultados numéricos del Ejemplo 7 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 8. Ahora, consideremos a la función $f(x) = \cot^4(3x)csc^2(3x)$ en $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. En este caso,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \cot^4(3x)csc^2(3x) dx = \frac{1}{5\tan^5(\frac{3}{4})} - \frac{1}{5\tan^5(\frac{9}{4})} \approx 0.117876836696773 \quad (23)$$

En la Tabla 7, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan en la Sección 2. En este caso, se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros métodos aplicados. En este caso, para $n = 30$ el error relativo es del orden de 10^{-4} . El menor error absoluto se obtiene del Método de Simpson 1/3 que aproxima a la integral exacta a cuatro cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 300$ para aproximar a la integral exacta a cuatro cifras significativas, con un error relativo del orden de 10^{-4} . Si se toma $n = 3000$, las aproximaciones a la integral exacta mejoran mucho con un error relativo del orden de 10^{-6} para Punto Medio y Trapecio, y son el doble de exactas para Simpson 1/3 y 3/8, como puede observarse en la Tabla 7.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M _n	EA _{M_n}	ER _{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T _n	EA _{T_n}	ER _{T_n}	Tiempo
6	8.3333e-02	9.2079e-02	2.5798e-02	2.1886e-01	0.001458 s	6	8.3333e-02	1.7395e-01	5.6073e-02	4.7569e-01	0.001738 s
30	1.6667e-02	1.1664e-01	1.2368e-03	1.0492e-02	0.002437 s	30	1.6667e-02	1.2036e-01	2.4827e-03	2.1062e-02	0.003490 s
300	1.6667e-03	1.1786e-01	1.2474e-05	1.0582e-04	0.021537 s	300	1.6667e-03	1.1790e-01	2.4949e-05	2.1165e-04	0.022193 s
3000	1.6667e-04	1.1788e-01	1.2475e-07	1.0583e-06	0.195183 s	3000	1.6667e-04	1.1788e-01	2.4950e-07	2.1166e-06	0.195864 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	S _{3n}	EA _{S_{3n}}	ER _{S_{3n}}	Tiempo	[gray].9 n	h	S _{8n}	EA _{S_{8n}}	ER _{S_{8n}}	Tiempo
6	8.3333e-02	1.3225e-01	1.4375e-02	1.2195e-01	0.001972 s	6	8.3333e-02	1.4008e-01	2.2203e-02	1.8836e-01	0.002671 s
30	1.6667e-02	1.1792e-01	4.7221e-05	4.0059e-04	0.004460 s	30	1.6667e-02	1.1798e-01	1.0165e-04	8.6234e-04	0.003441 s
300	1.6667e-03	1.1788e-01	4.9520e-09	4.2010e-08	0.023720 s	300	1.6667e-03	1.1788e-01	1.1136e-08	9.4476e-08	0.021637 s
3000	1.6667e-04	1.1788e-01	4.9566e-13	4.2049e-12	0.200129 s	3000	1.6667e-04	1.1788e-01	1.1148e-12	9.4571e-12	0.198458 s

Cuadro 7: Resultados numéricos del Ejemplo 8 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 9. Para este ejemplo, consideremos a la función $f(x) = \frac{x+4}{x^2+2x+5}$ en $[1, 2]$. Así,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx = \frac{\ln\left(\frac{25}{4}\right) - \ln\left(\frac{17}{4}\right) + 3\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right) - \arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{2}$$

$$\approx 0.790614908905623$$

En la Tabla 8, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan. En este caso, se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros dos métodos. Para $n = 6$, el error relativo es del orden de 10^{-8} , teniendo el menor error absoluto la de Simpson 1/3 que aproxima a la integral exacta a cuatro cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 30$ para aproximar a la integral exacta a cuatro cifras significativas, con un error relativo del orden de 10^{-5} . Para $n = 6$, el error relativo de los métodos del Punto Medio y del Trapecio es del orden de 10^{-4} , el cual es aceptable. Para $n = 30$, la exactitud es un poco más del doble para Simpson 1/3 y 3/8, respecto a los métodos del Punto Medio y del Trapecio.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M _n	EA _{M_n}	ER _{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T _n	EA _{T_n}	ER _{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	7.9088e-0	2.6289e-04	3.3252e-04	0.001193 s	6	1.6667e-01	7.9009e-01	5.2577e-04	6.6502e-04	0.001449 s
30	3.3333e-02	7.9063e-01	1.0515e-05	1.3300e-05	0.002486 s	30	3.3333e-02	7.9059e-01	2.1030e-05	2.6599e-05	0.002967 s
300	3.3333e-03	7.9062e-01	1.0515e-07	1.3300e-07	0.019500 s	300	3.3333e-03	7.9061e-01	2.1030e-07	2.6599e-07	0.020298 s
3000	3.3333e-04	7.9061e-01	1.0515e-09	1.3300e-09	0.178021 s	3000	3.3333e-04	7.9061e-01	2.1030e-09	2.6599e-09	0.178774 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	S _{3n}	EA _{S_{3n}}	ER _{S_{3n}}	Tiempo	[gray].9 n	h	S _{8n}	EA _{S_{8n}}	ER _{S_{8n}}	Tiempo
6	1.6667e-01	7.9061e-01	7.1734e-08	9.0732e-08	0.001991 s	6	1.6667e-01	7.9061e-01	7.6806e-08	9.7148e-08	0.002028 s
30	3.3333e-02	7.9061e-01	1.6695e-10	2.1117e-10	0.002802 s	30	3.3333e-02	7.9061e-01	3.7094e-10	4.6919e-10	0.004869 s
300	3.3333e-03	7.9061e-01	1.6875e-14	2.1345e-14	0.019525 s	300	3.3333e-03	7.9061e-01	3.8081e-14	4.8166e-14	0.021773 s
3000	3.3333e-04	7.9061e-01	7.7716e-16	9.8298e-16	0.176011 s	3000	3.3333e-04	7.9061e-01	2.2204e-16	2.8085e-16	0.178845 s

Cuadro 8: Resultados numéricos del Ejemplo 9 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 10. Consideremos a $f(x) = \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{1-4\tan^2(x)}}$ en $[0, 1]$. Se tiene que

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{1-4\tan^2(x)}} dx = \arcsen\left(2\tan\left(\frac{1}{4}\right)\right) \approx 0.535979982224614. \quad (24)$$

En la Tabla 9, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan. Aquí, se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros dos métodos. Para $n = 3$, el error relativo es del orden de 10^{-4} , teniendo el menor error absoluto el Método de Simpson 1/3, que aproxima a la integral exacta a tres cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 30$ para obtener un error relativo del orden de 10^{-4} , con la que aproximan a la integral exacta a tres cifras significativas.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M _n	EA _{M_n}	ER _{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T _n	EA _{T_n}	ER _{T_n}	Tiempo
6	8.3333e-02	1.3957e-03	2.6040e-03	4.4027e-02	0.001040 s	6	8.3333e-02	5.3879e-01	2.8133e-03	5.2488e-03	0.001217 s
30	1.6667e-02	5.6812e-05	1.0600e-04	4.6642e-02	0.003021 s	30	1.6667e-02	5.3609e-01	1.1366e-04	2.1206e-04	0.003023 s
300	1.6667e-03	5.6856e-07	1.0608e-06	4.6751e-02	0.022058 s	300	1.6667e-03	5.3598e-01	1.1371e-06	2.1216e-06	0.022419 s
3000	1.6667e-04	5.6856e-09	1.0608e-08	4.6752e-02	0.202728 s	3000	1.6667e-04	5.3598e-01	1.1371e-08	2.1216e-08	0.202563 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	S _{3n}	EA _{S_{3n}}	ER _{S_{3n}}	Tiempo	[gray].9 n	h	S _{8n}	EA _{S_{8n}}	ER _{S_{8n}}	Tiempo
6	8.3333e-02	5.3608e-01	1.0018e-04	1.8691e-04	0.001978 s	6	8.3333e-02	5.3618e-01	1.9561e-04	3.6496e-04	0.002087 s
30	1.6667e-02	5.3598e-01	1.9703e-07	3.6760e-07	0.002988 s	30	1.6667e-02	5.3598e-01	4.3852e-07	8.1817e-07	0.003222 s
300	1.6667e-03	5.3598e-01	1.9924e-11	3.7173e-11	0.022447 s	300	1.6667e-03	5.3598e-01	4.4823e-11	8.3628e-11	0.021365 s
3000	1.6667e-04	5.3598e-01	2.1094e-15	3.9356e-15	0.203998 s	3000	1.6667e-04	5.3598e-01	4.3299e-15	8.0784e-15	0.203760 s

Cuadro 9: Resultados numéricos del Ejemplo 10 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Caso de estudio 3: Resultados numéricos para funciones que no tienen antiderivada elemental.

En esta subsección, a diferencia de todas las anteriores, se trabaja con funciones cuya antiderivada no es una función elemental ([11]). Tomaremos como la integral exacta a la que nos proporciona el Primer Teorema Fundamental del Cálculo. En este caso, debemos calcular numéricamente dicha integral, por lo que utilizamos la cuadratura de Lobatto que viene proporcionada por la función *quadl* de MATLAB, que aproxima a la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$ con un error de 10^{-16} ([15]). Sin embargo, pueden utilizarse otras cuadraturas como la de Gauss-Kronrod, que viene dada por la función *quadgk*. Para cada n , aquí lo que observaremos en cuántas cifras decimales se iguala el resultado encontrado por los MIN de la Sección 2 con el dado por la función *quadl*. Para los siguientes ejemplos, consideraremos la función $f(x) = e^{x^2}$ y la función campana de Gauss $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, las cuales no tienen primitiva elemental ([21]).

Ejemplo 11. Sea $f(x) = e^{x^2}$, para $x \in [0, 1]$. En este caso, la integral aproximada dada por *quadl* es

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.462651745907181. \tag{25}$$

En la Tabla 9, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas presentadas e implementadas en MATLAB. En este caso, se observa también que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros dos métodos. Para $n = 3$, el error relativo es del orden de 10^{-4} , teniendo el menor error absoluto el de Simpson 1/3, que aproxima a la integral exacta a tres cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 30$ para obtener un error relativo del orden de 10^{-4} , con la que aproximan a la integral exacta a tres cifras significativas.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.4564e+00	6.2419e-03	4.2675e-03	0.001012 s	6	1.6667e-01	1.4752e+00	1.2527e-02	8.5646e-03	0.001279 s
30	3.3333e-02	1.4624e+00	2.5161e-04	1.7202e-04	0.002551 s	30	3.3333e-02	1.4632e+00	5.0329e-04	3.4410e-04	0.003134 s
300	3.3333e-03	1.4626e+00	2.5169e-06	1.7208e-06	0.020133 s	300	3.3333e-03	1.4627e+00	5.0338e-06	3.4416e-06	0.020239 s
3000	3.3333e-04	1.4627e+00	2.5169e-08	1.7208e-08	0.182598 s	3000	3.3333e-04	1.4627e+00	5.0339e-08	3.4416e-08	0.179609 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	S _{3n}	EAS _{3n}	ERS _{3n}	Tiempo	[gray].9 n	h	S _{8n}	EAS _{8n}	ERS _{8n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.4629e+00	2.2171e-04	1.5158e-04	0.001574 s	6	1.6667e-01	1.4631e+00	4.7641e-04	3.2572e-04	0.001606 s
30	3.3333e-02	1.4627e+00	3.7211e-07	2.5441e-07	0.004281 s	30	3.3333e-02	1.4627e+00	8.3553e-07	5.7124e-07	0.002981 s
300	3.3333e-03	1.4627e+00	3.7287e-11	2.5493e-11	0.021217 s	300	3.3333e-03	1.4627e+00	8.3894e-11	5.7358e-11	0.020086 s
3000	3.3333e-04	1.4627e+00	3.1086e-15	2.1253e-15	0.182843 s	3000	3.3333e-04	1.4627e+00	7.5495e-15	5.1615e-15	0.183889 s

Cuadro 10: Resultados numéricos del Ejemplo 11 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 12. Consideremos a la campana de Gauss $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ para $x \in [0, 1]$. Su integral aproximada dada por *quadl* es

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0.341344746068543. \quad (26)$$

En la Tabla 9, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan. En este caso, se observa también que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros dos métodos. Para $n = 3$, el error relativo está alrededor del orden de 10^{-5} , obteniéndose el menor error absoluto con Simpson 1/3, que aproxima a la integral exacta a cuatro cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 30$ para obtener un error relativo del orden de 10^{-5} .

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M _n	EAM _n	ERM _n	Tiempo	[gray].9 n	h	T _n	EAT _n	ERT _n	Tiempo
6	1.6667e-01	3.4163e-01	2.8051e-04	8.2179e-04	0.001096 s	6	1.6667e-01	3.4078e-01	5.6064e-04	1.6424e-03	0.001684 s
30	3.3333e-02	3.4136e-01	1.1203e-05	3.2820e-05	0.003120 s	30	3.3333e-02	3.4132e-01	2.2406e-05	6.5639e-05	0.003294 s
300	3.3333e-03	3.4134e-01	1.1202e-07	3.2818e-07	0.022745 s	300	3.3333e-03	3.4134e-01	2.2405e-07	6.5637e-07	0.023193 s
3000	3.3333e-04	3.4134e-01	1.1193e-09	3.2790e-09	0.208639 s	3000	3.3333e-04	3.4134e-01	2.2405e-09	6.5637e-09	0.212099 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	S _{3n}	EAS _{3n}	ERS _{3n}	Tiempo	[gray].9 n	h	S _{8n}	EAS _{8n}	ERS _{8n}	Tiempo
6	1.6667e-01	3.4135e-01	2.0953e-06	6.1383e-06	0.001917 s	6	1.6667e-01	3.4135e-01	4.7622e-06	1.3951e-05	0.002382 s
30	3.3333e-02	3.4134e-01	3.3205e-09	9.7278e-09	0.003009 s	30	3.3333e-02	3.4134e-01	7.4732e-09	2.1893e-08	0.003285 s
300	3.3333e-03	3.4134e-01	3.3196e-13	9.7250e-13	0.022956 s	300	3.3333e-03	3.4134e-01	7.4674e-13	2.1876e-12	0.022419 s
3000	3.3333e-04	3.4134e-01	5.5511e-17	1.6262e-16	0.209837 s	3000	3.3333e-04	3.4134e-01	2.2204e-16	6.5050e-16	0.214107 s

Cuadro 11: Resultados numéricos del Ejemplo 12 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Caso de estudio 4: Primitivas numéricas aproximadas.

En esta sección, se calcula una aproximación numérica de la primitiva, antiderivada, o integral indefinida de una función $f(x)$ por medio del Primer Teorema Fundamental del Cálculo ([21]), aplicando los MIN presentados en este trabajo. Denotemos por $F_M(x)$, $F_T(x)$, $F_{S3}(x)$, $F_{S8}(x)$ y $F_{Lobatto}(x)$ las primitivas numéricas dadas por los métodos del Punto Medio, del Trapecio, de Simpson 1/3 y 3/8, y la cuadratura de Lobatto, respectivamente. Tomaremos como primitiva exacta a la obtenida por medio de la cuadratura de Lobatto cuando la función no tiene una primitiva elemental. En los siguientes ejemplos, se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos, y en cada subintervalo $\left[a + \frac{(i-1)h}{m}, a + \frac{(i)h}{m} \right]$, para $i = 1, 2, 3, \dots, m$, de longitud $h = \frac{(b-a)}{m}$, se aplican cada una de las cuadraturas simples de los MIN presentados en este trabajo. Para ilustrar, al aplicar el Método de Simpson 3/8 simple, dado por (12), se divide el subintervalo $\left[a + \frac{(i-1)h}{m}, a + \frac{(i)h}{m} \right]$ en 3 subintervalos y se obtiene $F_{S8}(x_i) = \int_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{2}{3}h} P(x) \approx F(x_i) = \int_0^{x_i} f(t)dt$, en cada punto $x_i = a + \frac{(i-1)h}{m}$ del intervalo $[a, b]$, para $i = 1, 2, 3, \dots, m$, y así sucesivamente se van sumando las integrales para el consecutivo subintervalo $\left[a + \frac{(i)h}{n}, a + \frac{(i+1)h}{n} \right]$ para calcular $F_{S8}(x_{i+1}) = \int_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{2}{3}h} P(x) \approx F(x_{i+1}) = \int_0^{x_{i+1}} f(t)dt$ en el punto x_{i+1} .

A fin de tener una forma de medir la bondad de la aproximación, se define el Error Absoluto

$$EA_{\text{máx}}(F_C, F) = \text{máx} \{ |F_C(x_i) - F(x_i)|, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m \}, \quad (27)$$

entre la primitiva numérica F_C y la primitiva exacta F por $EA_{\text{máx}}(F_C, F)$. El subíndice C indica el MIN aplicado. A continuación se muestran dos ejemplos.

Ejemplo 13. Primitiva numérica aproximada de una función que tienen antiderivada elemental. Para poder comparar las primitivas numéricas con una *primitiva exacta*, es decir, donde la integral se puede expresar en términos de funciones elementales, se considera la función $f(x) = e^x \text{sen}(x)$ para $x \in [0, 5]$, y su primitiva exacta dada por $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\text{sen}(x) - \cos(x)) + c$ para $x \in [0, 6]$ y con $c = 0.5$. La constante c se eligió para $F(0) = 0$, ya que el Primer Teorema Fundamental nos devuelve una primitiva que toma el valor cero en cero. En este caso, vamos a comparar las soluciones numéricas dadas

por los MIN con la primitiva exacta $F(x)$ y la primitiva numérica $F_{Lobatto}(x)$ dada por una cuadratura de Lobatto que es calculada usando la función *quadl* de MATLAB.

Los resultados numéricos mostrados en la Tabla 12 muestran que las mejores aproximaciones están dadas por Simpson 1/3 y 3/8, incluso para el valor más pequeño $n = 60$, con un error absoluto de alrededor de 1×10^{-5} , siendo el más preciso Simpson 3/8. Para que Punto Medio y Trapecio tengan un error absoluto de alrededor de 1×10^{-4} , es necesario aumentar $n = 1500$ y $n = 15000$, respectivamente. En la Figura 7, se muestran las gráficas de las diferentes primitivas aproximadas de $F_M(x)$, $F_T(x)$, $F_{S3}(x)$, $F_{S8}(x)$, para $n = 30, 30, 60$ y 90 , respectivamente, las cuales coinciden con la gráfica de la primitiva aproximada $F_{Lobatto}(x)$ para $x \in [0, 5]$.

En la Tabla 13, se muestran los errores absolutos para diferentes valores de m aplicando la cuadratura de Lobatto, los cuales muestran que es mejor Lobatto que las demás cuadraturas presentadas en la Tabla 12, con una precisión de alrededor de 1×10^{-14} , pero con un mayor tiempo de cómputo comparado con Punto Medio, Trapecio y Simpson 1/8. Si no es requerida una precisión tan grande, puede resultar conveniente considerar el Método de Simpson 1/3, que guarda un compromiso entre tiempo de cómputo y precisión.

Punto Medio					Trapecio				
[gray].9 m	n	h	$EA_{\max}(F_M, F)$	Tiempo	[gray].9 m	n	h	$EA_{\max}(F_T, F)$	Tiempo
30	30	1.6667e-01	1.2992e-01	0.011344 s	30	30	1.6667e-01	2.5969e-01	0.007160 s
180	180	2.7778e-02	3.6109e-03	0.013018 s	180	180	2.7778e-02	7.2216e-03	0.025108 s
1500	1500	3.3333e-03	5.1999e-05	0.103457 s	1500	1500	3.3333e-03	1.0400e-04	0.209690 s
15000	15000	3.3333e-04	5.1999e-07	1.032783 s	15000	15000	3.3333e-04	1.0400e-06	2.023349 s

Simpson 1/3					Simpson 3/8				
[gray].9 m	n	h	$EA_{\max}(S_{S3}, F)$	Tiempo	[gray].9 m	n	h	$EA_{\max}(F_{S8}, F)$	Tiempo
30	60	8.3333e-02	9.8191e-05	0.008433 s	30	90	5.5556e-02	4.3645e-05	0.010721 s
180	360	1.3889e-02	7.5832e-08	0.037250 s	180	540	9.2593e-03	3.3703e-08	0.049297 s
1500	3000	1.6667e-03	1.5731e-11	0.304460 s	1500	4500	1.1111e-03	6.9775e-12	0.403255 s
15000	30000	1.6667e-04	1.2790e-13	3.026088 s	15000	45000	1.1111e-04	1.3500e-13	4.026059 s

Cuadro 12: Resultados numéricos del Ejemplo 13 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Cuadratura de Lobatto		
[gray].9 m	$EA_{m\acute{a}x}(F_{Lobatto}, F)$	Tiempo
30	1.4211e-14	0.047053 s
180	2.1316e-14	0.053725 s
1500	5.6843e-14	0.355341 s
15000	1.2079e-13	3.545414 s

Cuadro 13: Resultados numéricos del Ejemplo 13 aplicando la cuadratura de Lobatto, usando la función *quadl* de MATLAB con una tolerancia de 1×10^{-16} .

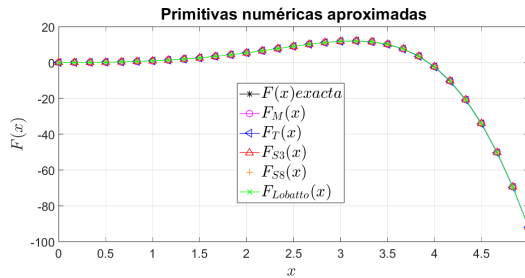


Figura 7: Gráficas de las primitivas numéricas aproximadas de la función $f(x) = e^x \text{sen}(x)$, $x \in [0, 5]$.

Ejemplo 14. Primitiva numérica aproximada de una función que no tiene antiderivada elemental. Para este ejemplo, consideremos a la función $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$, para $x \in [1, 12]$, que no tiene primitiva elemental. En este caso, vamos a comparar las soluciones numéricas dadas por los MIN, presentados en la Sección 3, con la primitiva aproximada $F_{Lobatto}(x) \approx F(x) = \int_1^x f(t)dt$, para $x \in [1, 12]$, usando la función *quadl* de MATLAB.

Los resultados numéricos, dados en la Tabla 14, muestran que las mejores aproximaciones están dadas por Simpson 1/3 y 3/8. Para $n = 66$, el error absoluto es de alrededor de 1×10^{-8} , siendo el más preciso Simpson 3/8. Para que los métodos del Punto Medio y del Trapecio tengan errores absolutos de alrededor de 1×10^{-8} , es necesario tomar $n = 33000$ para ambos métodos. En la Figura 8, se muestran las gráficas de las diferentes primitivas aproximadas $F_M(x)$, $F_T(x)$, $F_{S3}(x)$ y $F_{S8}(x)$, para $n = 66, 66, 132$ y 198 , respectivamente, las cuales coinciden con la gráfica de la primitiva aproximada $F_{Lobatto}(x)$ para $x \in [0, 5]$. También, se puede observar en la Tabla 14 que los tiempos de ejecución de la cuadratura de Lobatto $Tiempo_{Lobatto}$ son mayores para todos

los valores de m comparados contra los provistos por los métodos del Punto Medio y del Trapecio; estos son menores respecto a los tiempos arrojados por los métodos de Simpson 1/3 y 3/8.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 m	n	h	$EA_{\max}(F_M, F)$	$Tiempo_{PM}$	$Tiempo_{Lobatto}$	[gray].9 m	n	h	$EA_{\max}(F_T, F)$	$Tiempo_T$	$Tiempo_{Lobatto}$
66	66	1.6667e-01	5.4309e-04	0.005327 s	0.028470 s	66	66	1.6667e-01	1.0859e-03	0.010286 s	0.028470 s
330	330	3.3333e-02	2.1724e-05	0.021846 s	0.083085 s	330	330	3.3333e-02	4.3448e-05	0.044297 s	0.083085 s
3300	3300	3.3333e-03	2.1724e-07	0.215708 s	0.760821 s	3300	3300	3.3333e-03	4.3448e-07	0.427371 s	0.760821 s
33000	33000	3.3333e-04	2.1724e-09	2.131116 s	7.636930 s	33000	33000	3.3333e-04	4.3448e-09	4.213655 s	7.636930 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 m	n	h	$EA_{\max}(S_{S3}, F)$	$Tiempo_{S3}$	$Tiempo_{Lobatto}$	[gray].9 m	n	h	$EA_{\max}(S_{S8}, F)$	$Tiempo_{S8}$	$Tiempo_{Lobatto}$
66	132	8.3333e-02	9.2686e-08	0.121591 s	0.028470 s	66	198	5.5556e-02	4.1191e-08	0.357648 s	0.028470 s
330	660	1.6667e-02	1.4826e-10	0.236801 s	0.083085 s	330	990	1.1111e-02	6.5892e-11	0.423359 s	0.083085 s
3300	6600	1.6667e-03	1.6320e-14	1.293745 s	0.760821 s	3300	9900	1.1111e-03	6.5503e-15	2.200045 s	0.760821 s
33000	66000	1.6667e-04	3.3307e-16	10.758638 s	7.636930 s	33000	99000	1.1111e-04	3.3307e-16	19.217573 s	7.636930 s

Cuadro 14: Resultados numéricos del Ejemplo 14 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

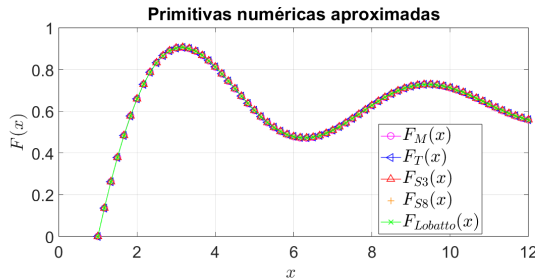


Figura 8: Gráficas de las primitivas numéricas aproximadas de la función $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$, $x \in [1, 12]$.

De los ejemplos 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 y 10, se observa que el Método del Punto Medio es más preciso que el del Trapecio. Para funciones polinomiales de grado uno o funciones continuas constantes a trozos, el método del Trapecio aproxima mejor que el resto de las cuadraturas, como lo muestra el ejemplo 1. En el caso de los métodos de Simpson, encontramos funciones en las que S8 es más preciso que S3, como en los ejemplos 1 y 9 (en ambos para $n = 3000$). Por lo tanto, la elección de un MIN depende de la clase a la que pertenecen las funciones; sin embargo, cuando solo se cuenta con un número limitado de mediciones o datos tabulados, es factible aplicar el método del Trapecio.

6 Conclusiones

En este trabajo se muestra la implementación computacional de cuatro métodos de integración: Punto Medio (que es un tipo de Sumas de Riemann), del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8, los cuales fueron programados en MATLAB, y fueron probados para diferentes funciones con y sin primitiva elemental. Los resultados numéricos muestran la eficiencia y factibilidad de cada método de integración para cierta clase de funciones.

Es importante mencionar que el código de los programas se desarrolló utilizando iteraciones o ciclos (también conocidos como bucles), que en MATLAB se implementan mediante los comandos *for* y *while*. Cabe mencionar que hay otras formas de programar el código de los métodos de integración numérica, como la vectorización, las cuales pueden optimizar los programas desarrollados. Sin embargo, el objetivo de este trabajo es didáctico, ya que consideramos que el lector podrá asociar los programas con los resultados sobre cuadraturas presentados aquí, haciendo más natural relacionar el código con las fórmulas de los métodos de integración numérica. Así, en aras de lograr un mejor entendimiento de los programas y las cuadraturas, se deja para trabajos futuros la optimización del código. Una posibilidad atractiva es la vectorización del código y comparar los resultados con los programas desarrollados aquí. El código de estos programas se puede descargar utilizando el hipervínculo de la sección 4.

Por último, los programas computacionales desarrollados en este trabajo pueden ser usados como material de apoyo para el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo, tanto para el nivel medio superior como para el superior.

7 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

- [1] Algreto-Badillo, I., Conde-Mones, J. J., Hernández-Gracidas, C. A., Morín-Castillo, M. M., Oliveros-Oliveros, J. J., & Feregrino-Uribe, C. (2020). *An FPGA-based analysis of trade-offs in the presence of ill-conditioning and different precision levels in computations*. Plos one, Vol. 15(6), e0234293.
- [2] Angoa, J., Contreras, A., Ibarra, M., López, M. & Martínez, A. (2015). *Cálculo Integral*. Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [3] Baccouch, M. (Ed.). (2021). *Finite Element Methods and Their Applications*. BoD—Books on Demand.
- [4] Brenner, S. C., Scott, L. R., & Scott, L. R. (2008). *The mathematical theory of finite element methods*. Vol. 3. New York: Springer.
- [5] Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Quinta edición. México: McGraw-Hill.
- [6] Conde-Mones, J. J., Estrada-Aguayo, E. R., Oliveros-Oliveros, J. J., Hernández-Gracidas, C. A., & Morín-Castillo, M. M. (2021). *Stable Identification of Sources Located on Interface of Nonhomogeneous Media*. Mathematics. Vol. 9(16), 1932.
- [7] Conde-Mones, J. J., Hernández-Gracidas, C. A., Morín-Castillo, M. M., Oliveros-Oliveros, J. J., & Juárez-Valencia, L. H. (2022). *Stable Numerical Identification of Sources in Non-Homogeneous Media*. Mathematics, Vol. 10(15), 2726.
- [8] Gardner, J. L. (2003). *Uncertainties in interpolated spectral data*. Journal of Research of the national Institute of Standards and Technology, Vol. 108(1), 69.
- [9] Glowinski, R. (2003). *Finite element methods for incompressible viscous flow*. *Handbook of numerical analysis*. Vol. 9, 3–1176.

- [10] Guerrero, W., Bermúdez, B. & Escamilla, J. (2017). *Tópicos de Análisis y Métodos Numéricos*. Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [11] Ivorra, C. (2009). *Funciones sin primitiva elemental*. La Gaceta de la RSME, Vol. 12(3), 483–516. Valencia, España.
- [12] Kirsch, A. (2011). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Vol. 120. New York: Springer.
- [13] Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*. Vol. 17. John Wiley & Sons.
- [14] León-Velasco, D. A., Morín-Castillo, M. M., Oliveros-Oliveros, J. J., Pérez-Becerra, T., & Escamilla-Reyna, J. A. (2019). *Numerical solution of some differential equations with Henstock–Kurzweil functions*. Journal of Function Spaces, 2019, 1–9.
- [15] López, C. P. (2002). *Matlab y sus Aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería*. Pearson Educación.
- [16] Mathews, J. H., & Fink, K. D. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*. Madrid: Prentice Hall.
- [17] Mora, W. (2015). *¿Se puede saber si una función tiene primitiva elemental?* Revista Digital Matemática, Educación e Internet. Vol. 15(2), 1–60. Costa Rica.
- [18] Ramos-Argüelles, F., Morales, G., Egozcue, S., Pabón, R. M., & Alonso, M. T. (2009). *Técnicas básicas de electroencefalografía: principios y aplicaciones clínicas*. In Anales del sistema sanitario de Navarra. Vol. 32, pp. 69–82. Gobierno de Navarra. Departamento de Salud.
- [19] Richter, M. (2021). *Inverse problems: Basics, theory and applications in geophysics*. Springer Nature.
- [20] Spivak, M. (2012). *Calculus*. Tercera edición, Reverté.
- [21] Stewart, J. (2011). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas*. Séptima edición, Cengage Learning.

- [22] Su, L., & Jiang, T. (2018). *Numerical method for solving nonhomogeneous backward heat conduction problem*. International Journal of Differential Equations, 2018, 1–11.
- [23] Swartz, C. W., & Kurtz, D. S. (2011). *Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*. Vol. 13. World Scientific Publishing Company.
- [24] Taesombat, W., & Sriwongsitanon, N. (2009). *Areal rainfall estimation using spatial interpolation techniques*. Science Asia, Vol. 35(3), 268–275.
- [25] Yang, W. C., Lee, P. Y., & Ding, X. (2009). *Numerical integration on some special Henstock-Kurzweil integrals*. The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Vol. 3(3), 205–223.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Escuela Preparatoria Alfonso Calderón Moreno, BUAP
Km.1.5 Carretera a la Resurrección, Col. Ex hacienda Bosques de
Manzanilla,
Puebla, Pue. C.P. 72307

claudio.lazcanom@alumno.buap.mx
jose.conde@correo.buap.mx
carlos.hgracidás@correo.buap.mx
felix.aquinoc@correo.buap.mx
jose.oliveros@correo.buap.mx